Matemáticas 1 - Parcial 3.

Resolución 3^{er} Parcial - MA1111

1. $\left[\text{TOTAL } 10 \text{ puntos}\right]$ Halle la derivada de cada una de las siguientes funciones

   (a) $\left[3 \text{ puntos}\right]$ $f(x) = \cos^3\Big(\sec^2(4x)\Big)$.

Solución : Observemos que, la función $f(x) = \cos^3\Big(\sec^2(4x)\Big)$ es una composición de funciones, así, que aplicamos la **regla de la cadena**

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \left[\cos^3\Big(\sec^2(4x)\Big)\right]' &= 3\cos^2\Big(\sec^2(4x)\Big)\left[\cos\Big(\sec^2(4x)\Big)\right]' \\
&= 3\cos^2\Big(\sec^2(4x)\Big)\left(-\operatorname{sen}\Big(\sec^2(4x)\Big)\right)\left[\sec^2(4x)\right]' \\
&= -3\cos^2\Big(\sec^2(4x)\Big)\operatorname{sen}\Big(\sec^2(4x)\Big)\Big(2\sec(4x)\Big)\left[\sec(4x)\right]' \\
&= -6\cos^2\Big(\sec^2(4x)\Big)\operatorname{sen}\Big(\sec^2(4x)\Big)\sec(4x)\Big(\sec(4x)\tan(4x)\Big)\left[4x\right]' \\
&= -6\cos^2\Big(\sec^2(4x)\Big)\operatorname{sen}\Big(\sec^2(4x)\Big)\sec(4x)\sec(4x)\tan(4x)\Big(4\Big) \\
&= -24\cos^2\Big(\sec^2(4x)\Big)\operatorname{sen}\Big(\sec^2(4x)\Big)\sec^2(4x)\tan(4x).
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\left[\cos^3\Big(\sec^2(4x)\Big)\right]' = -24\cos^2\Big(\sec^2(4x)\Big)\operatorname{sen}\Big(\sec^2(4x)\Big)\sec^2(4x)\tan(4x).
$$

★

1. $\Big[$TOTAL 10 puntos$\Big]$ Halle la derivada de cada una de las siguientes funciones

   (b) $\Big[$3 puntos$\Big]$ $f(x) = \sqrt{a - x^2}\,\tan^2\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) - \dfrac{1}{x}\right)$.

Solución : Observemos que, la función $f(x) = \sqrt{a - x^2}\,\tan^2\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) - \dfrac{1}{x}\right)$ es un producto de funciones, así, que aplicamos la **regla de la derivada de un producto**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\sqrt{a - x^2}\,\tan^2\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\right]' \\ &= \left[\sqrt{a - x^2}\right]'\tan^2\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{x}\right) + \sqrt{a - x^2}\left[\tan^2\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\right]', \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \left[\sqrt{a - x^2}\right]' &= \frac{1}{2\sqrt{a - x^2}}\left[a - x^2\right]' = \frac{1}{2\sqrt{a - x^2}}\left(\left[a\right]' - \left[x^2\right]'\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a - x^2}}\left(0 - 2x\right) = \frac{-2x}{2\sqrt{a - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{a - x^2}}, \end{aligned}$$

así,

$$\left[\sqrt{a - x^2}\right]' = -\frac{x}{\sqrt{a - x^2}},$$

mientras que

$$\begin{aligned} \left[\tan^2\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\right]' &= 2\tan\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\left[\tan\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\right]' \\ &= 2\tan\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\sec^2\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\left[\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{x}\right]' \\ &= 2\tan\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\sec^2\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\left(\left[\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)\right]' - \left[\frac{1}{x}\right]'\right) \\ &= 2\tan\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\sec^2\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\left(\cos\left(\sqrt{x}\right)\left[\sqrt{x}\right]' - \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= 2\tan\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\sec^2\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\left(\cos\left(\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= 2\tan\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\sec^2\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right), \end{aligned}$$

con lo que

$$\left[\tan^2\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\right]' = 2\tan\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\sec^2\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right).$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \left[\sqrt{a-x^2}\tan^2\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)-\frac{1}{x}\right)\right]' &= -\frac{x}{\sqrt{a-x^2}}\tan^2\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)-\frac{1}{x}\right)\\
&+\sqrt{a-x^2}\left(2\tan\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)-\frac{1}{x}\right)\sec^2\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= -\frac{x}{\sqrt{a-x^2}}\tan^2\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)-\frac{1}{x}\right)\\
&+2\sqrt{a-x^2}\tan\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)-\frac{1}{x}\right)\sec^2\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\right).
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
\left[\sqrt{a-x^2}\tan^2\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)-\frac{1}{x}\right)\right]' &= -\frac{x}{\sqrt{a-x^2}}\tan^2\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)-\frac{1}{x}\right)\\
&+2\sqrt{a-x^2}\tan\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)-\frac{1}{x}\right)\sec^2\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\right).
\end{aligned}
$$

★

1. $\left[\text{TOTAL } 10 \text{ puntos}\right]$ Halle la derivada de cada una de las siguientes funciones

   (c) $\left[4 \text{ puntos}\right]$ $f(t) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}$.

Solución : Observemos que, la función

$$f(t) = \frac{\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}$$

es un cociente de funciones, así, que aplicamos la **regla de la derivada de un cociente**

$$f'(t) = \left[\frac{\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}\right]' = \frac{\left[\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}\right]'\sqrt[3]{1+\sqrt{t}} - \sqrt{2+\sqrt[3]{t}}\left[\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}\right]'}{\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}\right)^2},$$

donde

$$\left[\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}\right]' = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}\left[2+\sqrt[3]{t}\right]' = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}\left(\left[2\right]' + \left[\sqrt[3]{t}\right]'\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}\left(0+\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\right) = \frac{1}{6\sqrt[3]{t^2}\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}},$$

así,

$$\left[\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}\right]' = \frac{1}{6\sqrt[3]{t^2}\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}},$$

mientras que

$$\left[\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}\right]' = \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{t}\right)^2}}\left[1+\sqrt{t}\right]' = \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{t}\right)^2}}\left(\left[1\right]' + \left[\sqrt{t}\right]'\right)$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{t}\right)^2}}\left(0+\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{6\sqrt{t}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{t}\right)^2}},$$

con lo que

$$\left[\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}\right]' = \frac{1}{6\sqrt{t}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{t}\right)^2}}.$$

Entonces

$$f'(t)=\left[\frac{\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}\right]'=\frac{\dfrac{1}{6\sqrt[3]{t^2}\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}-\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}\dfrac{1}{6\sqrt{t}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{t}\right)^2}}}{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{t}\right)^2}}$$

$$=\frac{\dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}{6\sqrt[3]{t^2}\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}-\dfrac{\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}{6\sqrt{t}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{t}\right)^2}}}{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{t}\right)^2}}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}{\sqrt[3]{t^2}\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}-\dfrac{\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}{\sqrt{t}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{t}\right)^2}}\right)}{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{t}\right)^2}}$$

Efectuamos la operación entre paréntesis

$$\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}{\sqrt[3]{t^2}\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}-\frac{\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}{\sqrt{t}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{t}\right)^2}}=\frac{\sqrt{t}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{t}\right)^2}\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}-\sqrt[3]{t^2}\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}{\sqrt{t}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{t}\right)^2}\sqrt[3]{t^2}\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}$$

$$=\frac{\sqrt{t}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{t}\right)^3}-\sqrt[3]{t^2}\sqrt{\left(2+\sqrt[3]{t}\right)^2}}{t^{1/2}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{t}\right)^2}\,t^{2/3}\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}$$

$$=\frac{\sqrt{t}\left(1+\sqrt{t}\right)-\sqrt[3]{t^2}\left(2+\sqrt[3]{t}\right)}{t^{1/2+2/3}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{t}\right)^2}\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}$$

$$=\frac{\sqrt{t}+\sqrt{t^2}-\left(2\sqrt[3]{t^2}+\sqrt[3]{t^3}\right)}{t^{5/6}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{t}\right)^2}\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}$$

$$=\frac{\sqrt{t}+\cancel{t}-2\sqrt[3]{t^2}-\cancel{t}}{t^{5/6}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{t}\right)^2}\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}{\sqrt[3]{t^2}\,\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}-\frac{\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}{\sqrt{t}\,\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{t}\right)^2}}=\cdots=\frac{\sqrt{t}-2\sqrt[3]{t^2}}{t^{5/6}\,\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{t}\right)^2}\,\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}.$$

Así,

$$\left[\frac{\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}\right]'=\frac{\dfrac{\sqrt{t}-2\sqrt[3]{t^2}}{6t^{5/6}\,\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{t}\right)^2}\,\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}}{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{t}\right)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{t}-2\sqrt[3]{t^2}}{6t^{5/6}\,\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{t}\right)^2}\,\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}\,\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{t}\right)^2}}=\frac{\sqrt{t}-2\sqrt[3]{t^2}}{6t^{5/6}\,\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{t}\right)^4}\,\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}.$$

Luego

$$\left[\frac{\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}\right]'=\frac{\sqrt{t}-2\sqrt[3]{t^2}}{6t^{5/6}\,\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{t}\right)^4}\,\sqrt{2+\sqrt[3]{t}}}.$$

★

2. $\left[3 \text{ puntos}\right]$ Halle $\dfrac{dy}{dx}$ para la curva definida por la ecuación $xy + y \operatorname{arcsen} x = 1$.

Solución : Derivamos implicítamente, respecto a la variable x

$$\begin{aligned}
\left[xy + y \operatorname{arcsen} x\right]' = \left[1\right]' \quad &\Longrightarrow \quad \left[xy\right]' + \left[y \operatorname{arcsen} x\right]' = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \left[x\right]' y + x\left[y\right]' + \left[y\right]' \operatorname{arcsen} x + y\left[\operatorname{arcsen} x\right]' = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \left(1\right) y + x y' + y' \operatorname{arcsen} x + y\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad y + x y' + y' \operatorname{arcsen} x + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = 0.
\end{aligned}$$

Despejamos y'

$$\begin{aligned}
y + x y' + y' \operatorname{arcsen} x + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \left(x + \operatorname{arcsen} x\right) y' = -y - \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} \\
&\Longrightarrow \quad \left(x + \operatorname{arcsen} x\right) y' = -\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) y \\
&\Longrightarrow \quad \left(x + \operatorname{arcsen} x\right) y' = -\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{\sqrt{1-x^2}}\, y \\
&\Longrightarrow \quad y' = -\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{\left(x + \operatorname{arcsen} x\right)\sqrt{1-x^2}}\, y.
\end{aligned}$$

Luego

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{\left(x + \operatorname{arcsen} x\right)\sqrt{1-x^2}}\, y.$$

★

3. $\left[\text{TOTAL 6 puntos}\right]$ Calcule los siguientes límites, en caso de que existan

(a) $\left[\text{3 puntos}\right]$ $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sqrt{\cos(2t)}-\sqrt{\cos(3t)}}{t^2}\right)^2.$

Solución : Puesto que la función $y=\left(\cdot\right)^2$ es una función continua, entonces

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sqrt{\cos(2t)}-\sqrt{\cos(3t)}}{t^2}\right)^2=\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{\cos(2t)}-\sqrt{\cos(3t)}}{t^2}\right)^2.$$

Observemos que, $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{\cos(2t)}-\sqrt{\cos(3t)}}{t^2}$ presenta una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$. Entonces, antes de aplicar la **regla de L'Höpital**, manipulamos algebraicamente la expresión

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{\cos(2t)}-\sqrt{\cos(3t)}}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{\cos(2t)}-\sqrt{\cos(3t)}}{t^2}\,\frac{\sqrt{\cos(2t)}+\sqrt{\cos(3t)}}{\sqrt{\cos(2t)}+\sqrt{\cos(3t)}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\left(\sqrt{\cos(2t)}\right)^2-\left(\sqrt{\cos(3t)}\right)^2}{t^2\left(\sqrt{\cos(2t)}+\sqrt{\cos(3t)}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos(2t)-\cos(3t)}{t^2\left(\sqrt{\cos(2t)}+\sqrt{\cos(3t)}\right)}$$

$$=\left(\lim_{t\to 0}\frac{\cos(2t)-\cos(3t)}{t^2}\right)\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{\cos(2t)}+\sqrt{\cos(3t)}}\right),$$

donde

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{\cos\left(2t\right)}+\sqrt{\cos\left(3t\right)}}\overset{\text{S.I.}}{=}\frac{1}{\sqrt{\cos\left(2\,(0)\right)}+\sqrt{\cos\left(3\,(0)\right)}}=\frac{1}{\sqrt{\cos(0)}+\sqrt{\cos(0)}}=\frac{1}{2}.$$

Por otra parte, $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\cos(2t)-\cos(3t)}{t^2}$, presenta una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$. Aplicamos la **regla de L'Höpital**

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cos(2t)-\cos(3t)}{t^2}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\left[\cos(2t)-\cos(3t)\right]'}{\left[t^2\right]'}=\lim_{t\to 0}\frac{\left[\cos(2t)\right]'-\left[\cos(3t)\right]'}{2t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(2t)\left[2t\right]'-\left(-\operatorname{sen}(3t)\right)\left[3t\right]'}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{-2\operatorname{sen}(2t)+3\operatorname{sen}(3t)}{2t},$$

observemos que este último límite sigue presentando la indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$, así, que aplicamos, otra vez, la **regla de L'Höpital**

$$\lim_{t\to 0}\frac{-2\,\text{sen}\,(2t)+3\,\text{sen}\,(3t)}{2t}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\Big[-2\,\text{sen}\,(2t)+3\,\text{sen}\,(3t)\Big]'}{\Big[2t\Big]'}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\Big[-2\,\text{sen}\,(2t)\Big]'+\Big[3\,\text{sen}\,(3t)\Big]'}{2}=\lim_{t\to 0}\frac{-2\cos(2t)\,\Big[2t\Big]'+3\cos(3t)\,\Big[3t\Big]'}{2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-4\cos(2t)+9\cos(3t)}{2}\overset{\text{S.I.}}{=}\frac{-4\cos\big(2\,(0)\big)+9\cos\big(3\,(0)\big)}{2}$$

$$=\frac{-4\cos(0)+9\cos(0)}{2}=\frac{-4+9}{2}=\frac{5}{2}.$$

Luego

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cos(2t)-\cos(3t)}{t^2}=\frac{5}{2}.$$

De aquí,

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{\cos(2t)}-\sqrt{\cos(3t)}}{t^2}=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{4}.$$

Entonces

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sqrt{\cos(2t)}-\sqrt{\cos(3t)}}{t^2}\right)^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}.$$

Luego

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sqrt{\cos(2t)}-\sqrt{\cos(3t)}}{t^2}\right)^2=\frac{25}{16}.$$

★

3. $\Big[$TOTAL 6 puntos$\Big]$ Calcule los siguientes límites, en caso de que existan

   (b) $\Big[$3 puntos$\Big]$ $\displaystyle\lim_{x\to a}\Big(\tan x - \tan a\Big)\cot\Big(x-a\Big)$.

Solución : Este límite presenta una indeterminación de la forma $0\cdot(\infty)$, por lo tanto, **NO** podemos aplicar la **regla de L'Höpital**, ya que dicha regla solo es aplicable a indeterminaciones de la forma $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Escribimos el límite de tal manera que se transforme en un límite con una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Así,

$$\lim_{x\to a}\Big(\tan x - \tan a\Big)\cot\Big(x-a\Big) = \lim_{x\to a}\frac{\tan x - \tan a}{\tan\Big(x-a\Big)},$$

el cual es un límite que presenta una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$, aplicamos la **regla de L'Höpital**

$$\lim_{x\to a}\frac{\tan x - \tan a}{\tan\Big(x-a\Big)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to a}\frac{\Big[\tan x - \tan a\Big]'}{\Big[\tan\Big(x-a\Big)\Big]'} = \lim_{x\to a}\frac{\Big[\tan x\Big]' - \Big[\tan a\Big]'}{\sec^2\Big(x-a\Big)\Big[x-a\Big]'}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\sec^2 x - 0}{\sec^2\Big(x-a\Big)\Big(\Big[x\Big]' - \Big[a\Big]'\Big)} = \lim_{x\to a}\frac{\sec^2 x}{\sec^2\Big(x-a\Big)\Big(1-0\Big)}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\sec^2 x}{\sec^2\Big(x-a\Big)} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{\sec^2(a)}{\sec^2\Big((a)-a\Big)} = \frac{\sec^2 a}{\sec^2\Big(0\Big)} = \frac{\sec^2 a}{1} = \sec^2 a.$$

Luego,

$$\lim_{x\to a}\Big(\tan x - \tan a\Big)\cot\Big(x-a\Big) = \sec^2 a.$$

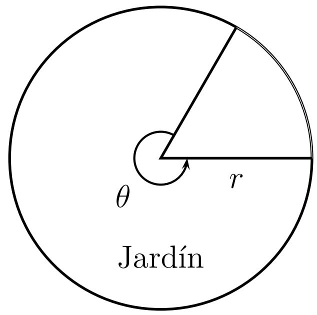
★

4. $\left[6 \text{ puntos}\right]$ Un arquitecto planea incorporar a su proyecto un jardín en forma de sector circular de radio r y ángulo central θ. El jardín debe tener área A (constante positiva fija). ¿Qué valores de r y θ hacen mínimo el perímetro del jardín?

Solución : El área de un sector circular de amplitud θ, medida en radianes y radio r es igual a

$$A_{\text{sector}} = \frac{\theta}{2} r^2,$$

por otra parte su longitud viene dada por $\theta\ r$.



Así, el perímetro del jardín es igual a

$$P = \theta r + 2r.$$

Como el área es fija y vale A, entonces

$$A = \frac{\theta}{2} r^2, \qquad \text{se tiene} \qquad \theta = \frac{2A}{r^2},$$

luego, la función (perímetro) cuyo mínimo absoluto debemos buscar es

$$f(r) = \frac{2A}{r} + 2r.$$

donde $r > 0$, es decir el dominio admisible de la fución es $\Big(0, +\infty\Big)$.

Derivamos, respecto a r, para obtener los puntos críticos estacionarios

$$f'(r) = \left[\frac{2A}{r} + 2r\right]' = -\frac{2A}{r^2} + 2 = \frac{2r^2 - 2A}{r^2},$$

igualamos a cero

$$\frac{2r^2 - 2A}{r^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2r^2 - 2A = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2r^2 = 2A \quad \Longleftrightarrow \quad r = \pm\sqrt{A},$$

puesto que $r > 0$, se tiene que $r = \sqrt{A}$.

Así, $r = \sqrt{A}$ es un punto crítico estacionario de f. Observe que la derivada de la función no existe en $r = 0$, pero este punto no es un punto crítico estacionario, pues $r = 0$ **NO** pertenece al dominio admisible.

Aplicamos el **Criterio de la segunda derivada para extremos relativos** para conocer si en el valor $r=\sqrt{A}$ se alcanza algún valor extremo. Derivamos por segunda vez

$$f''(r)=\left[-\frac{2A}{r^2}+2\right]'=\frac{4A}{r^3}.$$

Evaluamos el punto crítico estacionario $r=\sqrt{A}$ en la segunda derivada de f y obtenemos

$$f''\left(\sqrt{A}\right)=\frac{4A}{\left(\sqrt{A}\right)^3}=\frac{4A}{A^{3/2}}=4A^{-1/2}=\frac{4}{\sqrt{A}}>0.$$

Como $f''\left(\sqrt{A}\right)>0$, el **Criterio de la segunda derivada para extremos relativos** nos garantiza que la función f alcanza un valor extremo mínimo en $r=\sqrt{A}$ y dicho valor es

$$f\left(\sqrt{A}\right)=\frac{2A}{\sqrt{A}}+2\sqrt{A}=2\sqrt{A}+2\sqrt{A}=4\sqrt{A} \qquad \Longrightarrow \qquad f\left(\sqrt{A}\right)=4\sqrt{A}.$$

Calculamos θ. Tenemos que

$$\theta=\frac{2A}{\left(\sqrt{A}\right)^2}=\frac{2A}{A}=2.$$

Luego, el perímetro mínimo es $P=4\sqrt{A}$, cuando $r=\sqrt{A}$ y $\theta=2$. ★

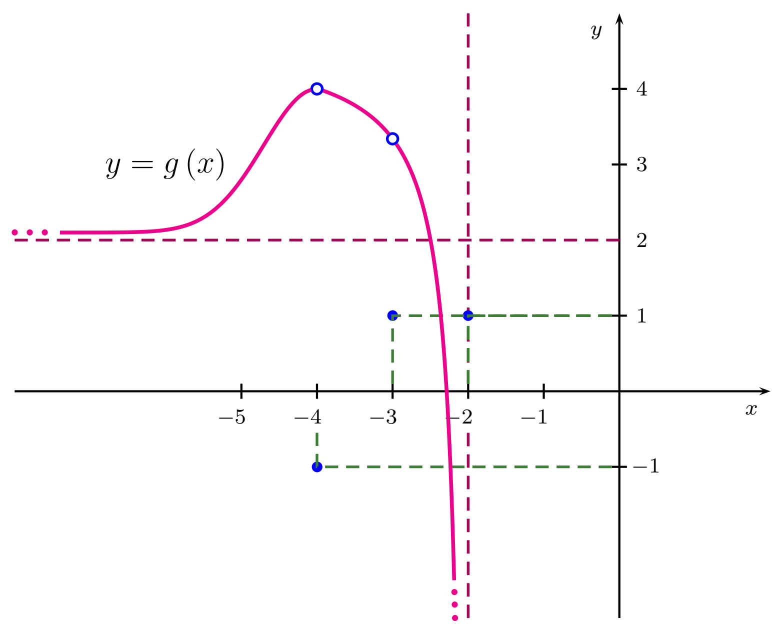
5. $\Big[10 \text{ puntos}\Big]$ Grafique la función h definida por

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \leq -2 \\ \dfrac{\left(x+1\right)^2}{x^2+1} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

sabiendo que g es una función que cumple

- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 2, \quad \lim\limits_{x \to -4} g(x) = 4,$ tiene asíntota vertical en $x = -2$
- $g'(x) > 0$ en $\left(-\infty, -4\right)$, $\quad g''(x) < 0$ en $\left(-4, -2\right)$.
- Valores extremos en los puntos $(-4, -1)$, $(-3, 1)$ y $(-2, 1)$.

Solución : Graficamos la función g



Para obtener un esbozo de la gráfica de $f(x) = \dfrac{\left(x+1\right)^2}{x^2+1}$ se recomienda conocer

1. Dominio	2. Punto de corte con los ejes	3. Int. de crecimiento
4. Int. de decrecimiento	5. Valor(es) mínimo(s)	6. Valor(es) máximo(s)
7. Concavidad hacia arriba	8. Concavidad hacia abajo	9. Puntos de inflexión
10. Asíntota horizontal	11. Asíntota vertical	12. Asíntota oblicua

Dominio : Como la función f es una función racional, entonces f tiene sentido si $x^2 + 1 \neq 0$, así,

$$\operatorname{Dom} f : \mathbb{R} \setminus \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 + 1 = 0 \right\}.$$

Resolvemos la ecuación $x^2+1=0$, para conocer que valores reales debemos excluir del dominio de f, por se una ecuación cuadrática igualada a cero, aplicamos la resolvente con $a=1$, $b=0$ y $c=1$

$$x=\frac{-(0)\pm\sqrt{(0)^2-4(1)(1)}}{2(1)}=\frac{\pm\sqrt{-4}}{2}\longleftarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Raíz cuadrada de un}\\ \text{número negativo.}\\ \text{Número complejo.}\end{array}}$$

así, la ecuación $x^2+1=0$ **NO** tiene raíces reales, de aquí,

$$\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x^2+1=0\right\}=\varnothing,$$

con lo que concluimos que

$$\operatorname{Dom} f:\mathbb{R}.$$

Puntos de cortes con los ejes :

- Eje x : $(y=0)$ Para obtener los puntos de corte de la función con el eje x, igualamos a cero a la función, es decir buscamos las raíces de la función

  $$0=\frac{(x+1)^2}{x^2+1},$$

  es conocido que un cociente es igual a cero si y solo si el numerador es igual a cero, siempre y cuando dicho valor no anule el denominador, en nuestro caso

  $$\frac{(x+1)^2}{x^2+1}=0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad (x+1)^2=0,$$

  con $x^2+1\neq 0$, de aquí,

  $$(x+1)^2=0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad x+1=0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad x=-1,$$

  como $x=-1$ no anula el denominador, tenemos que la raíz de la función f es $x=-1$.

  Entonces

  $$0=\frac{(x+1)^2}{x^2+1} \qquad\Longleftrightarrow\qquad x=-1,$$

  por lo tanto, f corta al eje x en el punto $(-1,0)$.

- Eje y : $(x=0)$ Para obtener los puntos de corte de la función con el eje y, evaluamos la función f en $x=0$

  $$y=f(0)=\frac{((0)+1)^2}{(0)^2+1}=\frac{(0+1)^2}{0+1}=1 \qquad\Longrightarrow\qquad y=1,$$

  por lo tanto, f corta al eje y en el punto $(0,1)$.

Monotonía (Intervalos de crecimiento y de decrecimiento) : Para conocer la monotonía de la función debemos estudiar el signo de su primera derivada, donde f' viene dada por

$$f'(x) = \left[\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\right]' = \frac{\left[(x+1)^2\right]'(x^2+1) - (x+1)^2\left[x^2+1\right]'}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2(x+1)\left[x+1\right]'(x^2+1) - (x+1)^2\left(\left[x^2\right]' + \left[1\right]'\right)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2(x+1)\left(\left[x\right]' + \left[1\right]'\right)(x^2+1) - (x+1)^2(2x+0)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2(x+1)(1+0)(x^2+1) - 2x(x+1)^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x+1)(x^2+1) - 2x(x+1)^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2(x+1)(x^2+1 - x(x+1))}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x+1)(x^2+1-x^2-x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2(x+1)(1-x)}{(x^2+1)^2}$$

Resolvemos una de las dos desigualdades

$$f'(x) = \frac{2(x+1)(1-x)}{(x^2+1)^2} > 0 \qquad \text{o} \qquad f'(x) = \frac{2(x+1)(1-x)}{(x^2+1)^2} < 0,$$

elegimos la desigualdad $\dfrac{2(x+1)(1-x)}{(x^2+1)^2} > 0.$

Raíces: Resolvemos $\dfrac{2(x+1)(1-x)}{(x^2+1)^2} = 0.$

(a) Numerador : $2(x+1)(1-x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x+1=0 & \Longrightarrow \quad x=-1. \\ 1-x=0 & \Longrightarrow \quad x=1. \end{cases}$

(b) Denominador : $(x^2+1)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2+1=0 \longleftarrow$ **NO** tiene raíces reales.

Estudiamos el signo de f'

	$-\infty$ -1	-1 1	1 $+\infty$
$2(x+1)$	$-$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$-$
$(x^2+1)^2$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
Monotonía	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

de aquí, se tiene

Intervalo de crecimiento : $(-1,1)$. Intervalo de decrecimiento : $(-\infty,-1)$, $(1,+\infty)$.

Valores extremos (Valor(es) mínimo(s) y valor(es) máximo(s)) : Por el **criterio de la primera derivada para valores extremos locales**, se tiene

	$-\infty$ -1	-1 1	1 $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
Monotonía	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Mín. (en -1) Máx. (en 1)

donde, los valores extremos son

$$\text{Valor mínimo :} \quad f(-1) = \frac{((-1)+1)^2}{(-1)^2+1} = \frac{(0)^2}{1+1} = \frac{0}{2} = 0,$$

es decir, la función tiene un valor mínimo de 0, alcanzado en $x=-1$, mientras que

$$\text{Valor máximo :} \quad f(1) = \frac{((1)+1)^2}{(1)^2+1} = \frac{(2)^2}{1+1} = \frac{4}{2} = 2,$$

es decir, la función tiene un valor máximo de 2, alcanzado en $x=1$.

Entonces,

Valor mínimo : $(-1,0)$. Valor máximo : $(1,2)$.

Concavidad : Estudiemos, ahora, la concavidad de la función f, para ello estudiamos el signo de la segunda derivada, así, calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = \left[\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}\right]' = 2\left[\frac{(1-x^2)}{(x^2+1)^2}\right]' = 2\,\frac{[(1-x^2)]'(x^2+1)^2 - (1-x^2)\left[(x^2+1)^2\right]'}{\left((x^2+1)^2\right)^2}$$

$$= 2\,\frac{\left([1]'-[x^2]'\right)(x^2+1)^2 - (1-x^2)\,2\,(x^2+1)\left([x^2]'+[1]'\right)}{(x^2+1)^4}$$

$$= 2\,\frac{(0-2x)(x^2+1)^2 - 2(1-x^2)(x^2+1)(2x+0)}{(x^2+1)^4}$$

$$= 2\,\frac{-2x(x^2+1)(x^2+1+2(1-x^2))}{(x^2+1)^4} = \frac{-4x(x^2+1)(x^2+1+2-2x^2)}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{-4x(3-x^2)}{(x^2+1)^3} = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = \frac{4x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}{(x^2+1)^3}.$$

Resolvemos una de las dos desigualdades

$$f''(x) = \frac{4x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}{(x^2+1)^3} > 0 \qquad \text{o} \qquad f''(x) = \frac{4x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}{(x^2+1)^3} < 0,$$

elegimos la desigualdad $\dfrac{4x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}{(x^2+1)^3} > 0.$

Raíces: Resolvemos $\dfrac{4x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}{(x^2+1)^3} = 0$

(a) Numerador : $4x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 4x = 0 & \Longrightarrow \quad x = 0 \\ x+\sqrt{3} = 0 & \Longrightarrow \quad x = -\sqrt{3}. \\ x-\sqrt{3} = 0 & \Longrightarrow \quad x = \sqrt{3}. \end{cases}$

(b) Denominador : $(x^2+1)^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2+1 = 0 \longleftarrow$ **NO** tiene raíces reales.

Estudiamos el signo de f''

	$-\infty$ · $-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$ · 0	0 · $\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$ · $+\infty$
$4x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-\sqrt{3}$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+\sqrt{3}$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x^2+1)^3$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
Concavidad	$\frown$	$\smile$	$\frown$	$\smile$

Punto de inflexión ($-\sqrt{3}$) Punto de inflexión (0) Punto de inflexión ($\sqrt{3}$)

de aquí, los puntos de inflexión vienen dados por $\left(-\sqrt{3}, f\left(-\sqrt{3}\right)\right)$, $(0, f(0))$ y $\left(\sqrt{3}, f\left(\sqrt{3}\right)\right)$, donde

(a) Para $\left(-\sqrt{3}, f\left(-\sqrt{3}\right)\right)$, tenemos

$$f\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{\left(\left(-\sqrt{3}\right)+1\right)^2}{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1} = \frac{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 2\left(-\sqrt{3}\right)(1) + (1)^2}{3+1} = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{4} = \frac{4-2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{2\left(2-\sqrt{3}\right)}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{2},$$

es decir $\left(-\sqrt{3}, \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$.

(b) Para $(0, f(0))$, tenemos

$$f(0) = \frac{((0)+1)^2}{(0)^2+1} = \frac{(1)^2}{0+1} = \frac{1}{1} = 1,$$

es decir $(0,1)$.

(c) Para $\left(\sqrt{3}, f\left(\sqrt{3}\right)\right)$, tenemos

$$f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\left(\left(\sqrt{3}\right)+1\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2+1} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\left(\sqrt{3}\right)(1) + (1)^2}{3+1} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{4} = \frac{4+2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{2\left(2+\sqrt{3}\right)}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{2},$$

es decir $\left(\sqrt{3}, \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$.

Así,

Cóncava hacia arriba : $\left(\sqrt{3}, 0\right)$, $\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$. Cóncava hacia abajo : $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$, $\left(0, \sqrt{3}\right)$.

$$\text{Puntos de inflexión : } \left(-\sqrt{3}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right), \quad (0,1), \quad \left(\sqrt{3}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right).$$

Comportamiento asintótico :

- <u>Asíntota vertical</u> : Como f es una función definida en todo $\mathbb{R}$ y es continua, ya que el denominador nunca se anula, concluimos que **NO** tiene asíntota vertical.

- <u>Asíntota horizontal</u> : Estudiamos el comportamiento de la función f hacia el infinito positivo y negativo.

  ♠ Comportamiento de f cuando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1},$$

  el cual es una indeterminación de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, aplicamos la Regla de L'Höpital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[(x+1)^2\right]'}{\left[x^2+1\right]'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2(x+1)}{2x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{[x+1]'}{[x]'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1} = 1,$$

  por lo que f tiene asíntota horizontal de $y=1$ cuando $x \to +\infty$.

  ♠ Comportamiento de f cuando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1},$$

  el cual es una indeterminación de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, aplicamos la Regla de L'Höpital

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\left[(x+1)^2\right]'}{\left[x^2+1\right]'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2(x+1)}{2x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{[x+1]'}{[x]'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1} = 1,$$

  por lo que f tiene asíntota horizontal de $y=1$ cuando $x \to -\infty$.

  Finalmente, concluimos que la función f tiene una asíntota horizontal $y=1$.

- <u>Asíntota oblicua</u> : Como la función f tiene una asíntota horizontal, entonces **NO** tiene asíntota oblicua.

Entonces, se tiene la siguiente información de la función $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

$$\text{Dominio}: \mathbb{R}. \quad \text{Punto corte con el eje } x: (-1,0). \quad \text{Punto corte con el eje } y: (0,1).$$

$$\text{Intervalo de crecimiento}: (-1,1). \quad \text{Intervalo de decrecimiento}: (-\infty,-1), \quad (1,+\infty).$$

$$\text{Valor mínimo}: (-1,0). \quad \text{Valor máximo}: (1,2).$$

$$\text{Cóncava hacia arriba}: \left(-\sqrt{3},0\right), \quad \left(\sqrt{3},+\infty\right). \quad \text{Cóncava hacia abajo}: \left(-\infty,-\sqrt{3}\right), \quad \left(0,\sqrt{3}\right).$$

$$\text{Puntos de inflexión}: \left(-\sqrt{3}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right), \quad (0,1), \quad \left(\sqrt{3}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\text{Asíntota vertical}: \text{No tiene.} \quad \text{Asíntota horizontal}: y=1. \quad \text{Asíntota oblicua}: \text{No tiene.}$$

Gráfica de la función : Para obtener un esbozo de la gráfica de f procedemos de la siguiente manera

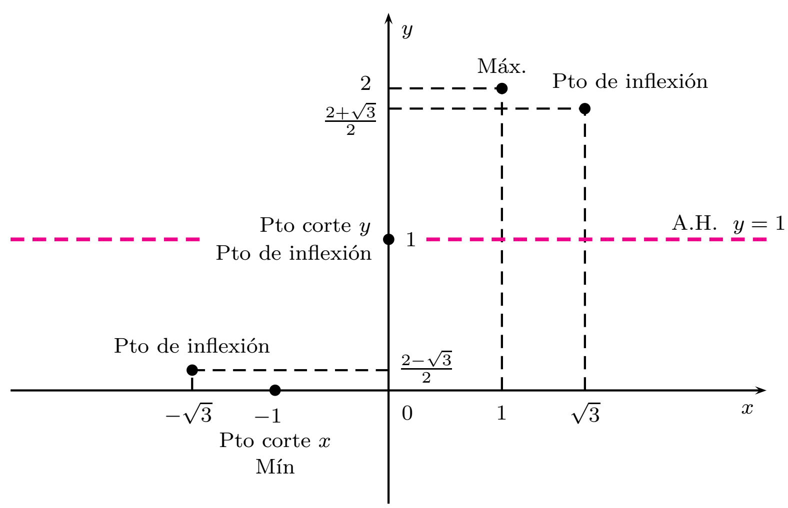
(a) **Puntos claves y asíntotas :** Colocamos en el sistema coordenados $\mathbb{R}^2$ los puntos claves: puntos de corte de la función con los ejes coordenados, valores extremos y puntos de inflexión, así, como las asíntotas.

$$\text{Puntos de cortes con los ejes: } (-1,0) \text{ y } (0,1).$$

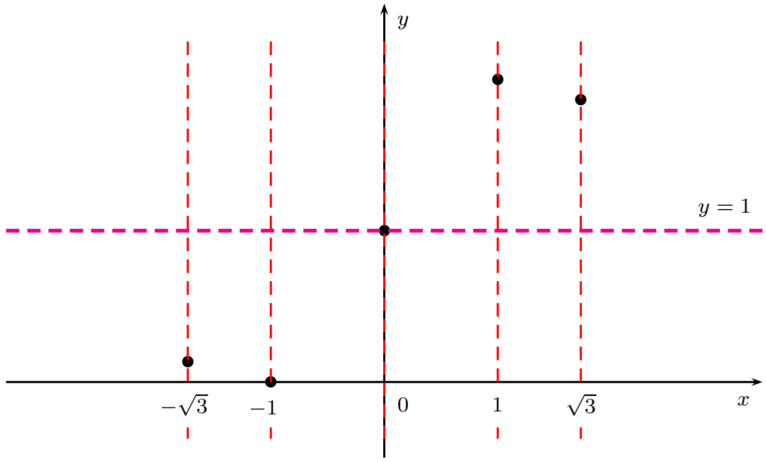
$$\text{Valor(es) mínimo(s): } (-1,0). \qquad \text{Valor(es) máximo(s): } (1,2).$$

$$\text{Puntos de inflexión: } \left(-\sqrt{3}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right), \quad (0,1), \quad \left(\sqrt{3}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\text{Asíntotas: Horizontal } y=1$$

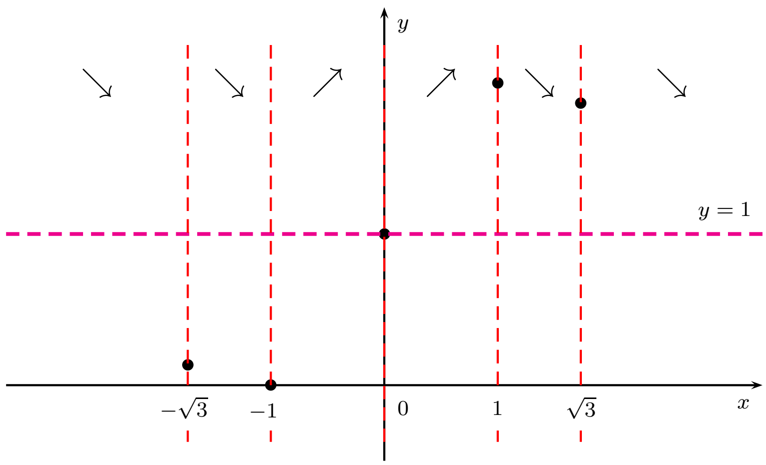


Estos puntos dividen el plano cartesianos en "parcelas"



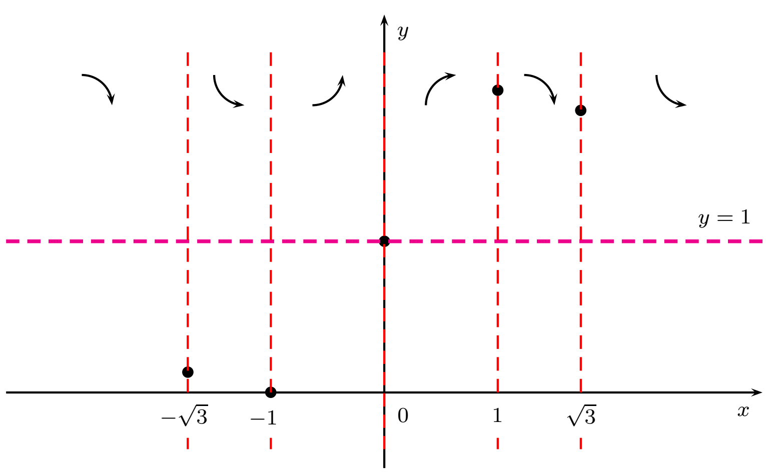
(b) **Monotonía :** Colocamos en cada parcela una flecha que indique la monotonía de la función

Intervalo de crecimiento : $(-1,1)$. Intervalo de decrecimiento : $(-\infty,-1)$, $(1,+\infty)$

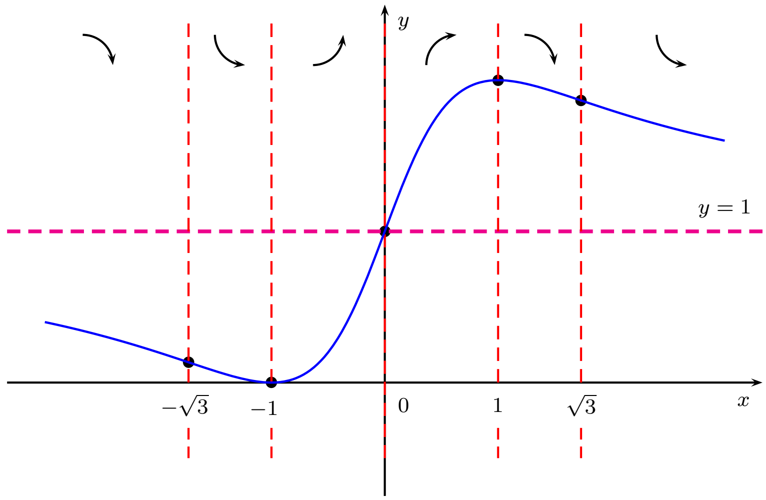


(c) **Concavidad :** Moldeamos las flechas colocadas en el item anterior de tal manera que representen la concavidad de la función.

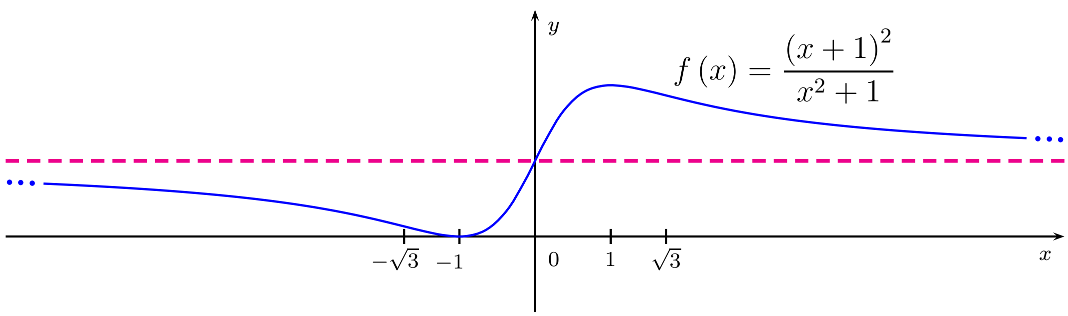
Cóncava hacia arriba : $\left(\sqrt{3},0\right)$, $\left(\sqrt{3},+\infty\right)$. Cóncava hacia abajo : $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$, $\left(0,\sqrt{3}\right)$.



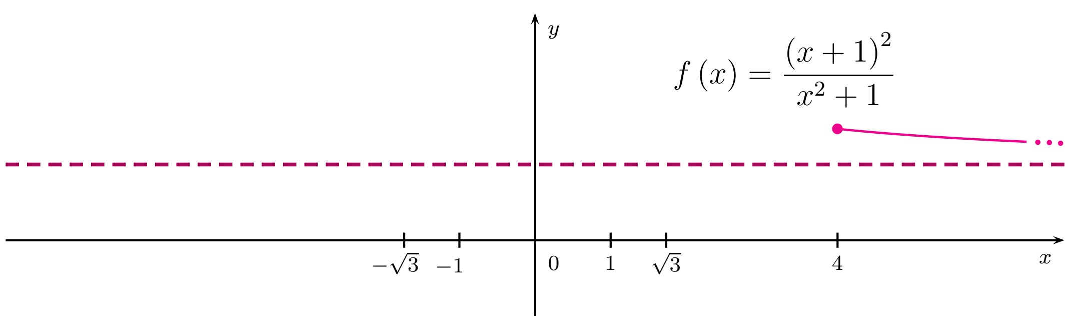
(d) **Trazos :** Hacemos pasar las flechas anteriores por los puntos claves, respetando el comportamiento asintótico de la función



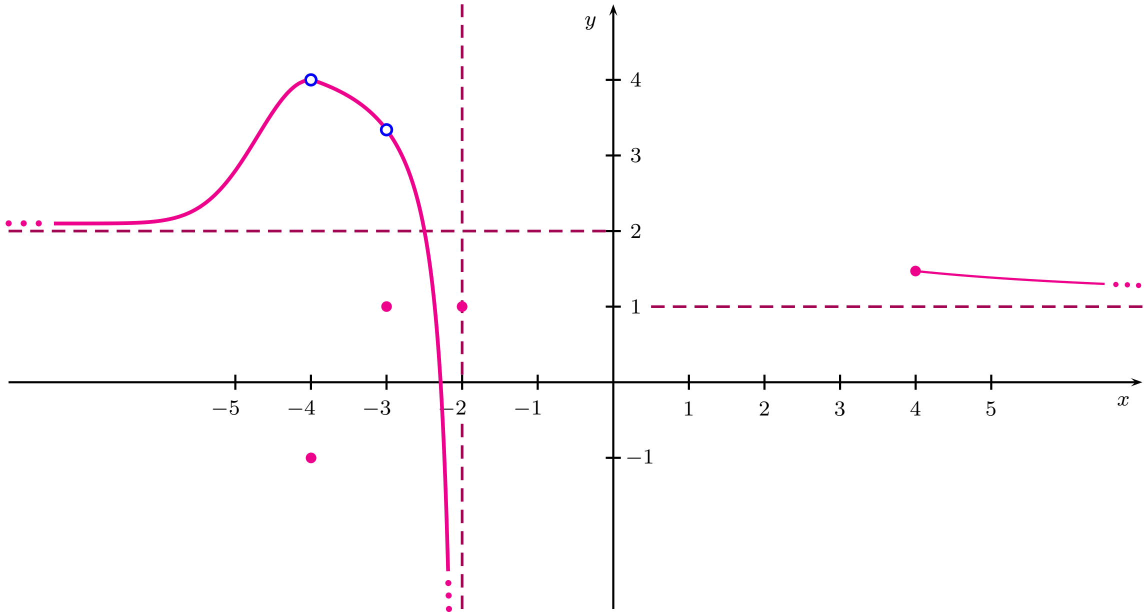
Así, la gráfica de f viene dada por



Al restringir el domino al intervalo $\left[4, +\infty\right)$, se obtiene la gráfica



Finalmente, la gráfica de la función h es



★